

PROVA DA OMIFCE 2023

1ª Fase – Nível II

01. Considere o número X definido por:

$$X = 1! + 2! + 3! + \dots + 2023!$$

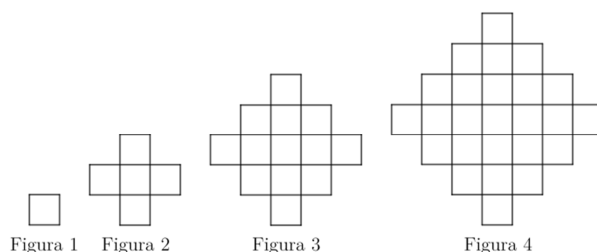
Qual o algarismo das unidades de X ?

- A) 1
- B) 2
- C) 3
- D) 4
- E) 5

02. No plano cartesiano usual, o gráfico da curva C definida pelos pares ordenados (x, y) , tais que $x = t^2$ e $y = t^3 - 4t$, para todo t real, intersecta a si próprio no ponto $P = (a, b)$. A soma $S = a + b$ é igual a

- A) $\sqrt{2}$
- B) 2
- C) $2\sqrt{2}$
- D) 4
- E) $4\sqrt{2}$

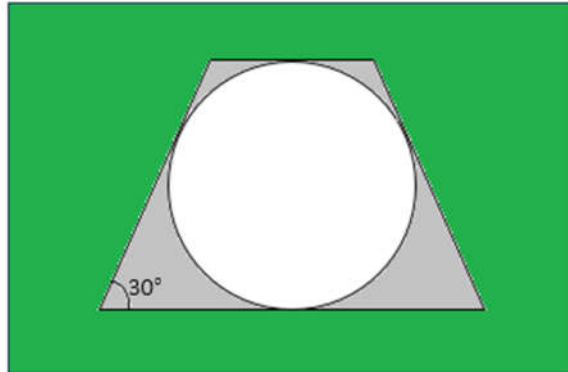
03. João construiu uma sequência de figuras com quadradinhos de 1 *cm* de lado, seguindo o padrão indicado na ilustração abaixo.



Qual é o perímetro da Figura 2023 dessa sequência?

- A) 16 156 *cm*
- B) 16 164 *cm*
- C) 16 172 *cm*
- D) 16 180 *cm*
- E) 16 188 *cm*

04. A figura representa parte do projeto da área comum do condomínio onde mora o professor Evanilson, na qual a borda de uma piscina circular de raio igual a 6 metros aparece inscrita em um trapézio isósceles, cujo ângulo da base maior mede 30° . A região interior ao retângulo e exterior ao trapézio será revestida com Pedra Cariri e na região interior ao trapézio e exterior ao círculo, será colocada grama natural.



Quantos metros quadrados de grama natural serão utilizados? Use $\pi = 3$.

- A) 192
- B) 180
- C) 168
- D) 152
- E) 140

05. Uma função f é tal que $f(x) - 2 \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x^2 + x - 2}{x}$, para todo número real x real diferente de

0. Qual é o valor de $f(5)$?

- A) 0
- B) 1
- C) 2
- D) 3
- E) 4

06. O estudo das funções e sequências constituem uma das mais belas faces da Matemática.

Manoel é um admirador destas e, certo dia, tomou a função real $f(x) = 3x + \text{sen}\left(x \cdot \frac{\pi}{2}\right)$ e calculou corretamente a soma S das imagens dos números inteiros positivos ímpares, menores do que

ou iguais a 2023, $S = f(1) + f(3) + f(5) + \dots + f(2023)$.

O valor de S encontrado por Manoel foi

- A) 3 072 431.
- B) 3 072 432.
- C) 3 072 433.
- D) 6 144 864.
- E) 6 144 865.

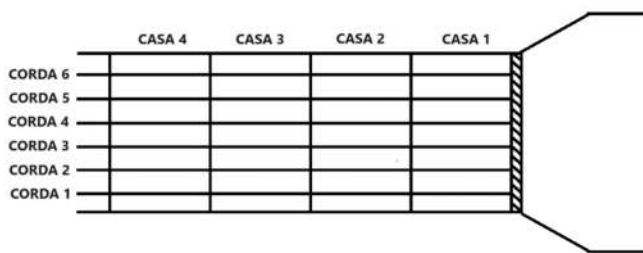
07. João sobe uma escada de 10 degraus existente em sua residência dando um passo simples (subindo um degrau) ou um passo duplo (subindo dois degraus). Para contar de quantas maneiras diferentes João pode subir essa escada, nota-se facilmente que ele poderá atingir o primeiro degrau de apenas uma maneira (dando um passo simples) e atingir o segundo degrau de duas maneiras (dando dois passos simples ou um único passo duplo). Já para atingir qualquer degrau, a partir do terceiro, temos que qualquer sequência de passos que nos leva a um ou dois degraus abaixo do degrau desejado também nos leva ao tal degrau, basta dar continuidade à sequência, dando mais um passo simples ou duplo, respectivamente. Matematicamente, sendo a_n o número de maneiras diferentes de João atingir o degrau de número n , temos a seguinte lei de recorrência:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 2 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \text{ para } n \geq 3. \end{cases}$$

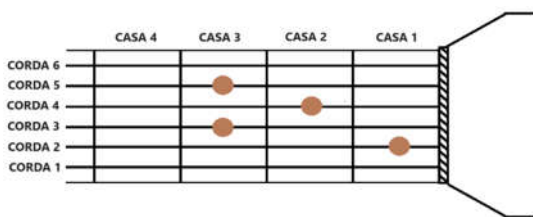
Com isso, obtemos a sequência (1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...), indicando que João poderá subir a escada de $a_{10} = 89$ maneiras diferentes. Agora, João resolveu atingir o 10º degrau dando passos simples, duplos e triplos. De quantas maneiras diferentes João poderá agora atingir o 10º degrau?

- A) 89
- B) 144
- C) 149
- D) 274
- E) 504

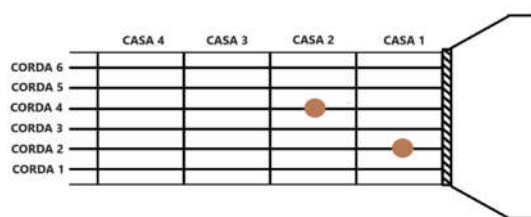
08. Fernando, um estudante iniciante de violão, pratica armando acordes usando no máximo quatro dedos da mão esquerda posicionados sobre as cordas, cada dedo em uma das quatro primeiras casas do braço do violão.



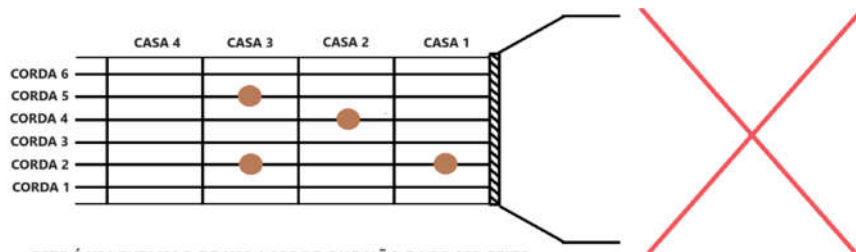
Para armar os acordes, dois dedos nunca podem ficar sobre a mesma corda, mesmo que eles estejam posicionados em casas distintas, como mostra o esboço a seguir, onde os círculos idênticos representam os dedos de Fernando.



ESTA É A REPRESENTAÇÃO DE UM ARCODE QUE PODE SER FEITO.



ESTA É A REPRESENTAÇÃO DE UM ARCODE QUE PODE SER FEITO.



ESTA É A REPRESENTAÇÃO DE UM ARCODE QUE NÃO PODE SER FEITO.
(Dois dedos estão posicionados na mesma corda 2)

Procedendo assim, qual o número de representações de acordes que podem ser feitos por Fernando, em que pelo menos dois dedos (círculos idênticos) fiquem posicionados numa mesma casa?

- A) 1 045
- B) 1 280
- C) 3 840
- D) 4 340
- E) 5 385

09. Adriano e Bruno criaram um jogo que usa um dado numerado de 1 a 6 e um conjunto de dominó clássico (com 28 peças distintas duas a duas apenas pelo par de números existente em uma das faces, cada peça apresenta dois números, diferentes ou não, escolhidos dentre os números naturais de zero a seis). O jogo começa com as faces numeradas das peças do dominó viradas para baixo. Depois, um dos jogadores lança o dado sobre a mesa e observa o número da face voltada para cima, e o outro jogador, de modo aleatório, pega uma das peças do dominó. Caso a peça de dominó escolhida apresente o número que foi observado no dado, esse outro jogador ganha um ponto.

Sabendo que Adriano lançou o dado, qual a probabilidade de Bruno ganhar um ponto?

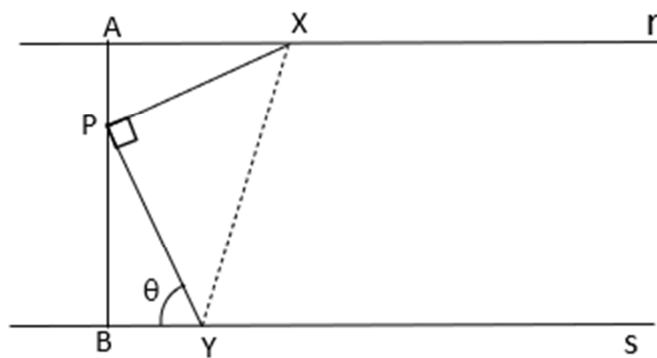
- A) $\frac{11}{28}$
- B) $\frac{5}{14}$
- C) $\frac{9}{28}$
- D) $\frac{2}{7}$
- E) $\frac{1}{4}$

10. Pensando em proteger a pedra que deu origem ao nome da cidade de Pedra Branca-CE da ação de vândalos, uma caixa em acrílico transparente foi construída, no formato de paralelepípedo retângulo, ficando a pedra no seu interior. Suponha que 22 m^2 de acrílico tenham sido utilizados na construção das seis faces da caixa e que, ao todo, foram utilizados 24 m de alumínio para revestir completamente as 12 arestas. Ontem, ao visitar os pontos turísticos de Pedra Branca-CE com seus alunos, o Professor Márcio Renato, percebeu que no interior da caixa, além da pedra, havia uma mosca buscando fugir de uma aranha.

Desprezando a espessura do acrílico, qual é a maior distância possível, em metros, que a mosca pode ficar da aranha, no interior da caixa?

- A) 3
- B) $2\sqrt{3}$
- C) $\sqrt{14}$
- D) $\sqrt{15}$
- E) 4

11. Na figura, r e s são retas perpendiculares ao segmento \overline{AB} , P é um ponto fixo entre A e B e o triângulo PXY é retângulo em P , onde X e Y são pontos variáveis das retas r e s , respectivamente.



Qual a medida do ângulo $\widehat{PYB} = \theta$, em graus, de modo que a área do triângulo PXY seja mínima?

- A) 15°
- B) 30°
- C) 45°
- D) 60°
- E) 75°

12. Esdras resolve uma prova com 10 perguntas do tipo “verdadeiro” ou “falso”. Ele sabe que há mais respostas “verdadeiras” do que “falsas”. Aleatoriamente, ele escolhe as 10 respostas, verificando ter mais respostas verdadeiras do que falsas.

Qual a probabilidade de Esdras acertar todas as questões?

- A) $\frac{1}{390}$
- B) $\frac{1}{357}$
- C) $\frac{1}{117}$
- D) $\frac{1}{258}$
- E) $\frac{1}{386}$

13. Se $x = 2^{110}$, $y = 3^{70}$ e $z = 10^{33}$, então

- A) $x < y < z$.
- B) $x < z < y$.
- C) $y < z < x$.
- D) $z < y < x$.
- E) $z < x < y$.

14. Quantas triplas de números reais (x, y, z) satisfazem a equação

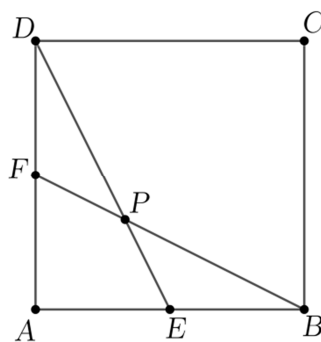
$$x^4 + 4y^2 + z^2 + 4xy + 2xz + 1 = 0?$$

- A) 0
- B) 1
- C) 2
- D) 3
- E) 4

15. Seja n um número natural de cinco algarismos. Dividindo-se n por 13, obtém-se quociente q e resto r . Quantos são os possíveis valores de n de modo que $q + r$ seja um múltiplo de 6?

- A) 14 999
- B) 15 000
- C) 15 001
- D) 15 002
- E) 15 003

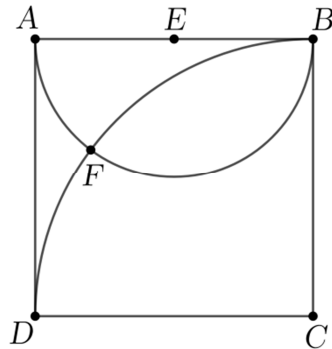
16. Na figura, $ABCD$ é um quadrado de área igual a 36 cm^2 . Os pontos E e F são pontos médios dos lados \overline{AB} e \overline{AD} , respectivamente. Os segmentos \overline{BF} e \overline{DE} se encontram no ponto P .



Qual é a área do quadrilátero $BCDP$?

- A) 22 cm^2
- B) 24 cm^2
- C) 26 cm^2
- D) 28 cm^2
- E) 30 cm^2

17. Na figura, o lado do quadrado $ABCD$ mede 2 cm e E é ponto médio do lado \overline{AB} . O arco \widehat{AB} é a uma semicircunferência de centro E , enquanto o arco \widehat{BD} é um quarto de circunferência centrada em C . Os arcos \widehat{AB} e \widehat{BD} têm a mesma extremidade B e se intersectam no ponto F .



Qual é a distância de F ao lado \overline{BC} ?

- A) $\frac{8}{5}\text{ cm}$
- B) $\frac{13}{8}\text{ cm}$
- C) $\sqrt{3}\text{ cm}$
- D) $\frac{9}{5}\text{ cm}$
- E) $\sqrt{5}\text{ cm}$

18. Entediado por conta de um “feriadão” sem aulas, Francisco resolveu passar o tempo verificando o resto da divisão por 7 dos números formados apenas pelo algarismo 1. A sequência abaixo ilustra os primeiros resultados obtidos por Francisco:

- $1 = 0 \cdot 7 + 1$, portanto, resto 1;
- $11 = 1 \cdot 7 + 4$, portanto, resto 4;
- $111 = 15 \cdot 7 + 6$, portanto, resto 6.

Continuando a sequência formada por Francisco, o resto da divisão do número $\underbrace{111\dots111}_{2023 \text{ dígitos } 1}$ por 7 é

- A) 1.
- B) 2.
- C) 4.
- D) 5.
- E) 6.

19. Os números 11, 12, 13, ..., 19, 20, 21 estão escritos em uma lousa. A cada turno você pode ou apagar dois números de sua escolha e escrever na lousa a soma dos números que foram apagados ou escolher um número escrito na lousa, que tenha mais que um algarismo, apagá-lo e em seu lugar escrever a soma dos algarismos do número que foi apagado.

Fazendo isso até que não seja mais possível, qual número restará na lousa?

- A) 5
- B) 6
- C) 7
- D) 8
- E) 9

20. O produto notável de *Sophie Germain* diz que

$$x^4 + 4y^4 = ((x - y)^2 + y^2) ((x + y)^2 + y^2).$$

Sabendo disso, qual o produto dos números inteiros positivos x e y que satisfazem a equação $x^4 + 4y^4 = 145$?

- A) 6
- B) 10
- C) 15
- D) 21
- E) 30